

## Полуинвариант, дискретная непрерывность

15 июля

Бывают задачи, где что-то происходит, то есть: есть какой-то процесс (кто-то что-то закрашивает или режет фигуру). Нам нужно как-то контролировать процесс, который происходит случайно (случайным образом). Когда процесса нет, его можно организовать.

Мы уже встречались с такими задачами в теме «Инвариант», мы находили что-то совсем неизменное в процессе.

**Полуинвариант** - это что-то, что может меняться, но не очень случайно, а именно, только в одну сторону. Например, какая-то величина всегда уменьшается или всегда увеличивается.

**Пример 1.** В клетках таблицы  $99 \times 99$  расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше, чем минусов.

Если какая-то целочисленная величина в процессе меняется на каждом шаге не больше чем на 1 (в ту или другую сторону), то она обязательно проходит через все промежуточные значения между начальным и конечным. Такая величина называется дискретной, а прием — **дискретной непрерывностью**. Дискретную непрерывность можно использовать для неконструктивного доказательства существования объекта или события.

**Пример 2.** В ряд выложены 50 черных и 50 белых шаров, причём самый левый и самый правый шары чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы белых и черных шаров осталось поровну.

*В следующих двух задачах важно, что полуинвариант целочисленный и не может быть больше определенного числа.*

1. На шахматной доске  $100 \times 100$  королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать?
2. В клетках таблицы  $99 \times 99$  расставлены целые числа. Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что можно сделать в итоге лишь конечное число таких операций.

*Если полуинвариант не целочисленный, то его ограниченность еще не гарантирует окончания процесса (например, убывающий положительный полуинвариант мог бы бесконечно долго принимать значения  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots$ ). В этих случаях прекращение ходов гарантируется конечным числом позиций.*

3. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел  $a, b, c, d$  оказывается, что  $(a-d)(b-c) < 0$ , то числа  $b$  и  $c$  можно поменять

местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

*Очень часто положение, в котором нет разрешенных операций, и является искомым.*

4. В клетки прямоугольной таблицы вписаны числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Докажите, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел в любой строке или любом столбце неотрицательны.

*Некоторые конструкции строятся “методом последовательного улучшения”. Мы берем несовершенную конструкцию, и начинаем ее преобразовывать. Полуинвариант гарантирует завершение процесса и достижение нужного эффекта в конце.*

5. В парламенте каждый депутат имеет не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого депутата в его палате было не более одного врага.
6. На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.

*Полуинвариант может быть и нестрогим, то есть не меняться при некоторых ходах. Тогда полезно найти еще один полуинвариант, который строго меняется как раз тогда, когда первый остается неизменным. Если и второй полуинвариант оказывается нестрогим, то приходится рассматривать и третий, и четвертый... В этом случае естественно рассматривать наборы значений инвариантов как строки, упорядоченные лексикографически (то есть как слова в словаре: сравниваются первые элементы, при равенстве – вторые, ... и так до первого несовпадения).*

7. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя лежат карты рубашкой вниз (в частности, может вынут просто одну карту рубашкой вниз), переворачивает эту пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что независимо от того, как Петя выбирает пачки, в конце концов все карты лягут рубашкой вверх.
8. Шеренга из 100 новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, а некоторые – направо. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?
9. За круглым столом сидит чётное количество гномов. У каждого на колпаке несколько помпонов. Причём у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не более чем на 1. Докажите, что найдётся пара гномов, сидящих друг напротив друга, количества помпонов на колпаках которых отличаются не больше, чем на 1.